

LW-RCP를 이용한 2단 도립진자의 천이 제어

Transition Control of a Double Inverted Pendulum Using an LW-RCP

정종익¹, 주도윤¹, Yusuke Fujiyama¹, 이영삼^{1,*}
(Jongik Jeong¹, Doyoon Ju¹, Yusuke Fujiyama¹, and Young Sam Lee^{1,*})

¹Embedded Control Lab. (ECL), Department of Electrical and Computer Engineering, Inha University

Abstract: This study investigates the transition control problem for a double inverted pendulum system, which has one stable and three unstable equilibrium points. We propose a method for implementing transition control using a lab-built double inverted pendulum and extend swing-up control to achieve this. The proposed method uses a two-degree-of-freedom control structure that combines feedforward and feedback controls. To obtain the feedforward trajectories offline, we construct an optimal control problem with two-point boundary values that has constraints on the dynamic equations, boundary values at the equilibrium points, and input and output constraints. We use energy as the cost of the optimal control problem and employ a direct collocation method to transform the continuous-time optimal control problem with constraints into a nonlinear optimization problem. During real-time control, we use a time-varying LQ controller as a feedback controller to compensate for the uncertainty of feedforward control and accurately follow the feedforward trajectories. We implement the proposed transition control based on high-level thinking using the lab-built light-weight rapid control prototyping (LW-RCP) system to shorten the design time and provide useful information in the design and experiment processes. Finally, we perform an actual transition control experiment and validate the performance of the proposed method using the experimental results.

Keywords: double inverted pendulum, transition control, LW-RCP, optimal control problem, direct collocation method

1. 서론

도립진자 시스템(inverted pendulum system)은 동특성상 불안정성, 비선형성, 비최소위상 특성을 가지고 있어 제어 이론을 교육하기 위한 교육용 시스템으로서뿐만 아니라 연구자들에게는 새로운 제어 기법을 제안한 후 그 효용성을 입증하기 위해 널리 사용되어 왔다. 도립진자는 구동기의 개수보다 제어 대상 변수가 더 많은 부족 구동 시스템이며 대표적인 유형의 도립진자인 직선형 도립진자와 회전형 도립진자는 각각 제어를 어렵게 하는 고유한 특징들이 있어 제어기 설계에 있어 난이도가 높은 시스템이다[1,2]. 도립진자 시스템의 제어 종류는 진자가 바닥으로 늘어져 있는 초기 상태에서 도립 상태로 전환하는 swing-up 제어와 도립 상태를 유지하는 균형 제어가 있다[3]. 특히 swing-up 제어는 도립진자 시스템의 비선형성과 불안정성 및 시스템이 가지는 입/출력 제약을 고려하여 제어기를 설계해야 하기 때문에 균형 제어에 비해 난이도가 더 높은 연구 주제이다. 현재 swing-up 문제는 Lyapunov 함수를 이용한 방식과 [4,5,6], Bang-Bang 제어를 이용한 방식 [7], 비선형 예측제어를 이용해 제어하는 방식 [8] 등 다양한 연구가 도전적으로 시도되고 있다. 또한 진자의 단수가 2개 이상인 다단 도

립진자의 경우 swing-up 제어 문제의 난이도가 특히 높아 오랫동안 연구의 대상이 되어 왔으나 2007년에 와서야 Graichen에 의해 효과적인 해법이 제안되었다[9]. Graichen은 앞먹임 제어(feedforward control)와 되먹임 제어(feedback control)를 함께 사용하는 2-자유도 제어구조를 도입하여 직선형 도립진자의 레일 길이 제약을 고려함과 동시에 swing-up 제어를 수행하는 문제를 효과적으로 해결하였다. 이후 Graichen의 방법을 3단 도립진자에 확장 적용하여 3단 도립진자의 swing-up 제어도 실험적으로 구현에 성공한다 [10]. 문헌 [10]의 결과는 기본적으로는 Graichen의 결과를 이용하지만 3단 도립진자가 갖는 본질적인 제어 난이도를 해결하였다는 것에서 결과의 의미를 찾을 수 있다. 앞선 두 문헌[9, 10]에서 사용한 2-자유도 제어구조의 기본적 착상은 다단 도립진자가 갖는 동적 방정식을 이용하여 도립진자가 도립의 상태에 이르러게끔 하는 상태와 제어입력의 궤적을 offline으로 계산하고, 계산된 제어 입력을 앞먹임 형태로 적용하여 도립에 이르는 운동을 발생시키고 발생된 실제의 궤적과 계산된 궤적과의 차이를 되먹임 제어를 통해 보정함으로써 계산된 앞먹임 궤적을 최대한 추종하게끔 하여 swing-up에 이르러게 하는 것이다. 그러나 두 문헌 [9, 10]의

*Corresponding Author

Manuscript received July 17, 2023; revised August 5, 2023; accepted August 10, 2023

정종익: 인하대학교 전기컴퓨터공학과 대학원생(wlm1235456@gmail.com, ORCID[®] 0000-0001-8708-3010)

주도윤: 인하대학교 전기컴퓨터공학과 대학원생(seiko.kr@gmail.com, ORCID[®] 0000-0001-7011-6779)

Yusuke Fujiyama: 인하대학교 전기컴퓨터공학과 대학원생(dldb123wkd@naver.com, ORCID[®] 0009-0008-6179-9334)

이영삼: 인하대학교 전기컴퓨터공학과 교수(lys@inha.ac.kr, ORCID[®] 0000-0003-0665-1464)

방식은 앞먹임 궤적을 생성하는 과정에서 거리, 속도, 입력 등의 제약조건이 없는 상태에서 궤적을 생성하는 한계가 있다. 본 논문에서 궤적 생성 시 제약조건을 포함하는 수치적 해법인 *direct collocation* 기법을 이용한다.

1단 도립진자의 경우에는 진자가 바닥으로 늘어져 있는 안정한 균형점(equilibrium point)에서 도립 상태의 불안정한 균형점으로 이동하는 한 가지 유형의 *swing-up* 문제만 존재하지만, 2단 도립진자의 경우에는 하나의 안정한 균형점과 3개의 불안정한 균형점이 존재하게 되어 *swing-up* 문제를 확장하여 균형점과 균형점 사이를 천이하는 천이 제어 문제를 정의할 수 있다. 천이 제어 문제는 *swing-up* 제어 문제와 근본적인 특징은 동일하지만 도립진자 시스템이 갖는 레일의 길이, 구동부의 성능에 따라서 어떠한 방법을 적용하느냐에 따라 제어의 성패가 달라질 수 있는 새로운 유형의 문제이다. 하지만 지금까지의 2단 도립진자에 대한 연구는 *swing-up* 문제에 초점을 맞추고 4개의 균형점 간의 천이 제어 문제를 다룬 연구결과는 아직 문헌상에 발표되지 않았다. 2단 도립진자의 4개 균형점으로 인해 발생하는 천이의 형태는 전통적인 *swing-up*을 제외하고도 11가지의 천이 형태가 존재하며 이를 제어하기 위한 연구는 *swing-up* 제어 못지않게 도전적인 연구라고 할 수 있다. 이 논문에서는 2단 도립진자에서의 천이 제어 문제를 정의하고 천이 제어를 이루기 위한 제어 전략을 제안한다. 이를 위해 연구실에서 자체 개발한 2단 도립진자를 이용하고 제어 알고리즘의 구성을 위해서는 역시 연구실에서 자체 개발한 LW-RCP02 (Light-Weight Rapid Control Prototyping)를 사용한다.

본 논문의 이후 구성은 다음과 같다. II장에서는 Euler-Lagrange Formulation을 기반으로 얻어진 2단 도립진자의 동적 방정식을 정리한다. III장에서는 본 연구에서 사용할 2단 도립진자의 구조를 소개하고 균형점과 천이 제어 문제를 정의한다. IV장에서는 천이 제어를 위한 제어전략을 제안하고 LW-RCP02를 이용한 천이 제어를 구현한다. V장에서는 12가지 천이 제어 실험을 수행하고 결과를 분석한다. 마지막으로 VI장에서 결론을 맺는다.

II. 2단 도립진자의 수학적 모델

그림 1은 2단 도립진자 시스템의 기구적 개념도이다. 본 논문에서는 SI 단위계를 사용하며 y 는 대차(cart)의 초기 위치로부터의 변위를 나타내고 u 는 대차의 가속도, M 는 대차의 질량이며 F 는 대차에 인가되는 힘의 크기이다. L_1 은 1단 진자부의 회전축에서 2단 진자의 회전축까지의 길이, m_1 은 1단 진자의 질량, l_1 은 1단 진자부의 회전축에서 질량중심까지의 길이, I_1 은 1단 진자의 회전관성모멘트이다. L_2 은 2단 진자부의 회전축에서 진자의 끝까지의 길이, m_2 은 2단 진자의 질량, l_2 은 2단 진자부의 회전축에서 질량중심까지의 길이, I_2 은 2단 진자의 회전관성모멘트이다. θ_1 는 지면의 법선의 방향으로부터 1단 진자부의 회전 변위를 의미하며, θ_2 는 1단 진자부와 평행인 직선으로부터 2단 진자부의 상대적인 회전변위를 의미한다. c_1 와 c_2 는 회전축에서 발생하는 마찰계수이다.

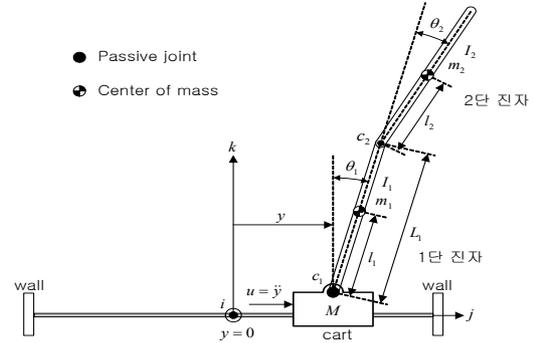


그림 1. 2단 도립진자 개념도.

Fig. 1. The conceptual diagram of a double inverted pendulum.

1. 동적 방정식

2단 도립진자의 수학적 모델은 Euler-Lagrange equation을 이용하여 유도하면 식 (1)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \ddot{y} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (1)$$

여기서

$$\begin{aligned} n_1 &= h_1 \cos(\theta_1) + h_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ n_2 &= h_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ m_{11} &= h_3 + h_6 + 2h_4 \cos(\theta_2), \\ m_{12} &= h_6 + h_4 \cos(\theta_2), \\ m_{21} &= h_6 + h_4 \cos(\theta_2), \\ m_{22} &= h_6, \\ r_1 &= -h_4 \sin(\theta_2) (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) - h_5 \sin \theta_1 \\ &\quad - h_7 \sin(\theta_1 + \theta_2) + c_1 \theta_1, \\ r_2 &= h_4 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 - h_7 \sin(\theta_1 + \theta_2) + c_2 \dot{\theta}_2. \end{aligned}$$

이고 $h_1 \sim h_7$ 는 다음과 같이 정의되며 g 는 중력가속도 9.81 [m/s²]를 나타낸다.

$$\begin{aligned} h_1 &= m_1 l_1 + m_2 L_1, \\ h_2 &= m_2 l_2, \\ h_3 &= I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2, \\ h_4 &= m_2 L_1 l_2, \\ h_5 &= g(m_1 l_1 + m_2 L_1), \\ h_6 &= I_2 + m_2 l_2^2, \\ h_7 &= g m_2 l_2. \end{aligned}$$

입력을 가속도 $u = \ddot{y}$ 인 가속도 모델로 유도하면 식 (1)은 다음과 같이 다시 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \ddot{y} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \right\}.$$

이를 풀면 $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ 를 다음과 같이 정리할 수 있다. 여기서 상태변수를 각각 $x_1 = y$, $x_2 = \theta_1$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \dot{y}$, $x_5 = \dot{\theta}_1$, $x_6 = \dot{\theta}_2$, $x_7 = \int_0^t y(\tau) d\tau$ 로 정의하면 최종적으로 2단 도립진자의 동적 방정식을 식 (2)와 같은 비선형 상태공간 모델로 나타낼 수 있다.

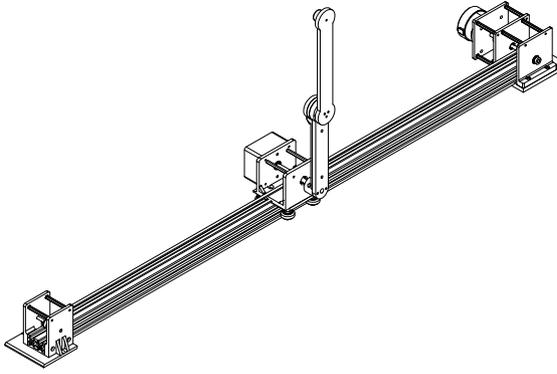


그림 2. 연구에 사용된 2단 도립진자의 기구적 구조.
Fig. 2. Structure of the double inverted pendulum used in the study.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{(-m_{22}n_1 + m_{12}n_2)\ddot{y} + (-m_{22}r_1 + m_{12}r_2)}{\Phi},$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{(m_{21}n_1 - m_{11}n_2)\ddot{y} + (m_{21}r_1 - m_{11}r_2)}{\Phi},$$

$$\Phi = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ u \\ \frac{(-m_{22}n_1 + m_{12}n_2)u + (-m_{22}r_1 + m_{12}r_2)}{\Phi} \\ \frac{(m_{21}n_1 - m_{11}n_2)u + (m_{21}r_1 - m_{11}r_2)}{\Phi} \\ x_1 \end{bmatrix} \cdot (2)$$

x $f(x,u)$

상태변수의 마지막 요소인 $\int_0^t y(\tau)d\tau$ 는 시뮬레이션 같은 이상적인 모델상에서는 필요 없으나 실제 시스템 제어에서 발생하는 대차 위치의 정상상태 오차를 줄이기 위해 추가한 항이다.

III. 2단 도립진자의 천이 제어 설계

1. 2단 도립진자의 구조 설계

이 논문에서 사용되는 2단 도립진자의 기구적 구조는 그림 2와 같다. 이 도립진자는 연구실에서 직접 제작하였으며 3D printing와 CNC 가공을 통해 실제 수학적 모델과 동적 응답의 정합 특성이 우수하게 설계되었다[11]. 대차에 힘을 인가하는 구동기는 50W 출력의 BLDC 모터를 사용하고 있으며, 20000 CPR (Counts Per Revolution)의 분해능을 지닌 encoder (E40H8-5000-3-N-5)를 사용한다. 대차는 backlash를 최소화시키기 위해서 모터에 감속기어를 적용하지 않으며 tooth pitch가 2 [mm]인 40 teeth의 timing pulley와 timing belt를 이용하여 대차에 동력을 전달한다. Timing pulley 1 회전당 대차는 80 [mm]를 이동할 수 있으므로 이론상 encoder가 측정할 수 있는 대차의 최소 이동 거리는 4.00e-6 [m]이다. 1단 진자부는 8192 CPR의 분해능을 가진 encoder

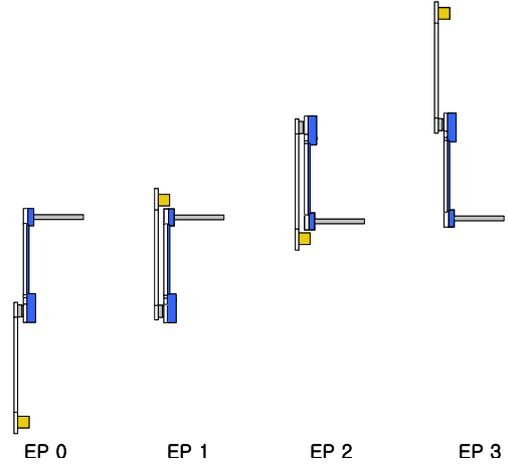


그림 3. 2단 도립진자의 4가지 균형점.
Fig. 3. Four equilibrium points of a double inverted pendulum.

표 1. 논문에 사용된 2단 도립진자의 parameter.

Table 1. The parameters of the double inverted pendulum used in this paper.

Link	$i = 1$	$i = 2$
m_i	0.1454 [kg]	0.1525 [kg]
I_i	6.9948e-04 [kgm ²]	9.6318e-04 [kgm ²]
L_i	0.1645 [m]	0.2100 [m]
l_i	0.0720 [m]	0.1185 [m]
c_i	7.7416e-04	5.4077e-04

(AMT102-V)를 사용하고 2단 진자부는 4096 CPR을 가진 encoder (AS5145B)를 사용한다. 따라서 encoder가 이론상 측정할 수 있는 1단 진자부의 최소 회전각은 7.670e-4 [rad]이고 2단 진자부의 최소 회전각은 1.534e-3 [rad]이다. 기구부의 구조상 결함이 용이한 형태의 encoder를 선정해야 했기 때문에 서로 다른 3가지 종류의 encoder를 사용한다. 대차가 이동할 수 있는 레일의 총 길이는 0.7 [m]로 [9]에서 사용된 2단 도립진자와 비교했을 때 절반 이하의 작은 크기이며, 경제적인 가격으로 구성이 가능하도록 설계되었다. 표 1은 논문에서 사용된 2단 도립진자 모델 계수이다.

2단 도립진자의 1단 진자부와 2단 진자부 진자의 상태에 따라 존재할 수 있는 4가지 균형점(Down-down, Down-up, Up-down, Up-up)은 그림 3처럼 표현된다. 이 논문에서 사용되는 균형점의 번호는 Up과 Down의 상태를 각각 1과 0으로 봤을 때, 2진수의 표현법과 방식이 같다. 이 명명 방식은 도립진자의 단수가 늘어나면 2진수 규칙에 맞춰 균형점을 할당할 수 있게 되는 장점이 존재하며, 진자의 균형점 상태를 직관적으로 이해할 수 있게 된다. 이후 본 논문에서 도립진자의 균형점을 표기할 때는 EP0 (Down-down), EP1 (Down-up), EP2 (Up-down), EP3 (Up-Up)으로 표기한다.

2. LW-RCP02

RCP 시스템은 단기간에 효율적인 제어 algorithm을 설계, 구현 및 검증에 위해 사용하는 개발 환경을 의미한다. RCP 시스템은 Simulink와 같은 block diagram 방식의 모델링 프

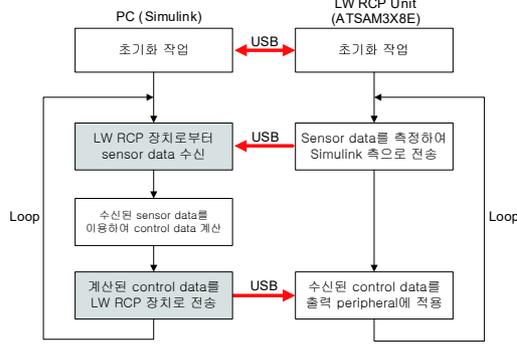


그림 4. LW-RCP의 동작방식.

Fig. 4. The flowchart of the LW-RCP operation.

로그래밍, 하드웨어 입/출력 장치를 제어하는 library block, C-code 생성기, 실시간 타겟(target) 컴퓨터, 호스트(host) 컴퓨터와의 통신을 포함하여 구성된다. 이를 통해 사용자는 Simulink를 이용하여 원하는 제어 plant를 모의실험한 후, 실제 시스템을 제어하며, 제어 과정 중 실시간으로 매개 변수를 수정하여 쉽게 변화를 관찰할 수 있다. RCP를 이용하면 제어기 개발자는 library block을 이용하여 제어기를 구성하고, 구성된 제어기에 대한 C-code를 자동 생성함으로써 오류가 발생하기 쉬운 low-level coding 작업을 수행할 필요 없이 algorithm 개발에 집중할 수 있다[12]. 즉 RCP는 까다로운 작업을 자동화하고 수정 및 변경이 용이하여 개발 주기를 단축할 수 있는 장점을 가지고 있다[13]. RCP는 주로 실제 모델에서 실험하기 어려운 ECU (Engine Control Unit) 개발 분야[14]와 로봇공학분야[15], 우주항공분야[16] 등에서 활발하게 쓰인다.

본 연구에서 제어 algorithm 구현을 위해 연구실에서 자체 개발한 LW-RCP를 이용한다. LW-RCP는 기존의 상용 RCP 장비와 비교하여 경제적인 비용으로 구성하면서도 고가의 RCP와 동등한 성능을 제공하기 위해 개발되었다. LW-RCP는 hardware interface를 담당하는 LW-RCP 하드웨어 장치와 Simulink에서 사용하는 library block으로 구성된다. 제어기 설계자는 LW-RCP library에서 제공되는 block을 이용하여 하드웨어 접근을 담당하는 block 기반 algorithm을 구성하고, Simulink에서 기본적으로 제공되는 block을 사용하여 제어 연산과 관련된 부분의 algorithm을 구성한다. LW-RCP 하드웨어 장치와 LW-RCP library block을 이용하여 구성된 Simulink algorithm 모델은 그림 4와 같은 방식으로 상호작용한다. Sensor data의 측정이나 control data의 출력과 같이 hardware interface가 필요한 부분은 LW-RCP 장치가 담당하고 Simulink 기반의 제어 algorithm은 제어 연산을 PC에서 담당하는 구조이다. Simulink가 실행되는 PC와 LW-RCP 하드웨어 장치간의 통신은 High-speed USB 통신을 통해 이루어지며, 최대 2KHz의 sampling frequency를 지원한다. LW-RCP02는 LW-RCP01의 확장모델로 입/출력 핀이 확장되었고, 기능은 향상되었으며, 크기는 감소된 모델이다. 그림 5는 실험에서 사용된 LW-RCP02와 BLDC driver가 결선된 사진이다.

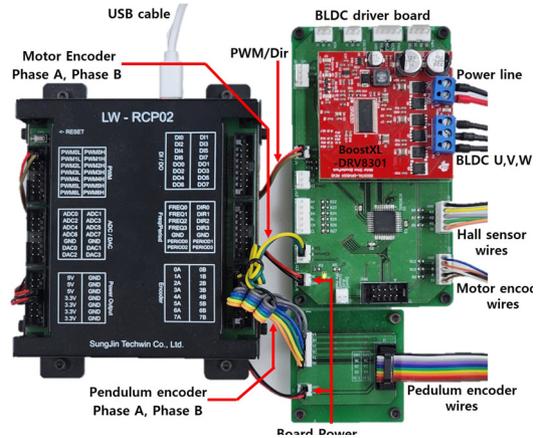


그림 5. LW-RCP02 unit과 BLDC driver 결선 모습.

Fig. 5. Wire connection between the LW-RCP02 unit and the BLDC driver board.

IV. 2단 도립진자의 천이 과정

2단 도립진자의 천이 제어는 다음의 세 단계를 거친다.

1. 현재 균형점의 선형 제어
2. 현재 균형점에서 다음 균형점에서의 천이 제어
3. 다음 균형점의 선형 제어

각 과정은 진자의 초기 상태(EP0)에서 도립 상태(EP3)로 이동하는 swing-up 문제와 구성이 유사하다. 우선 4가지 균형점을 천이하기 전에 현재 상태를 유지하기 위해 선형 제어를 수행한 후, 현재 균형점에서 다음 균형점에서의 천이 제어를 진행한 뒤 마지막으로 바뀐 균형점에서도 상태를 유지하기 위해 선형 제어를 수행해야 한다. 따라서 한 번의 천이 과정은 균형점의 선형 제어와 균형점 간의 천이 제어 두 가지 조건을 모두 충족해야 한다. 2단 도립진자의 천이 궤적의 경우 총 12가지의 궤적이 존재하므로 위의 과정을 12가지의 경우로 분할하여 각각의 조합이 조건을 충족하도록 실험을 구성해야 한다.

1. 균형점의 선형 상태 방정식

2단 도립진자는 정합성이 높은 동역학 모델을 구할 수 있고 도립진자 특성상 각 균형점에서 진자각이 π 의 배수에 위치하는 특징이 있어 동역학 모델을 선형화 시키기 용이하다. 따라서 대부분의 논문에서 최적제어 기법을 통한 제어방식을 주로 사용하고 있으며 본 논문에서도 최적제어 기법을 통해 선형 제어하였다[1-3,5,7,9-11]. 따라서, 4가지 균형점에서 선형 상태를 유지하기 위해 선형 시불변 시스템(LTI:Linear Time-invariant System)의 상태공간 모델을 유도해 볼 수 있다. 2.1장에서 유도된 식 (2)를 상태 변수와 입력 변수의 균형점 x_{ep_n} , u_{ep_n} 을 기준으로 선형 근사(linear approximation)하면 식 (3)과 같이 표현할 수 있다.

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{ep_n}, u_{ep_n}}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_{ep_n}, u_{ep_n}} \quad (3)$$

여기서 u_{ep_n} 는 균형점에서의 입력 변수의 값으로 $u_{ep_0} = u_{ep_1} = u_{ep_2} = u_{ep_3} = 0$ 이고, x_{ep_n} 는 선형화하고자 하는 균형점의

상태 변수의 값을 의미하며 각 균형점에서 x_{ep_n} 의 값은 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} x_{ep_0} &= [0, \pi, 0, 0, 0, 0]^T, & x_{ep_1} &= [0, \pi, \pi, 0, 0, 0]^T, \\ x_{ep_2} &= [0, 0, \pi, 0, 0, 0]^T, & x_{ep_3} &= [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (4)$$

LTI 시스템에서 상태공간 모델로 나타내면 식 (5)와 같이 정리할 수 있게 된다.

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t). \quad (5)$$

여기서 $\delta x(t)$ 는 $\delta x(t) = x(t) - x_{ep_n}$ 을 의미하며, $\delta u(t)$ 는 식 (6)과 같이 $\delta x(t)$ 이득 계수 K 를 곱한 형태로 나타난다.

$$\delta u(t) = -K\delta x(t). \quad (6)$$

여기서 이득 행렬 K 은 LQ 제어 이득 값 이용한다. LQ 제어 방식은 제어 설계자의 설계변수를 포함한 비용함수를 정의하고 이 비용함수를 최소화하는 제어 기법으로 비용함수 J 는 식 (7)과 같은 형태로 나타난다.

$$J = \int_0^{\infty} \delta x^T(t) Q_L \delta x(t) + \delta u^T(t) R_L \delta u(t) dt. \quad (7)$$

여기서 가중치가 선형 시스템에 대한 것임을 나타내기 위해 첨자 L 을 사용하였다. Q_L 행렬은 상태의 가중치를 나타내고, R_L 행렬은 입력의 가중치를 나타내며 이는 각각 $Q_L \geq 0$ 이고 $R_L > 0$ 이다. 설계한 비용함수의 가중치에 따라 이득 행렬 K 은 식 (8)과 같이 나타난다.

$$K = R_L^{-1} B^T P. \quad (8)$$

여기서 P 는 식 (9)의 Algebraic Riccati equation을 풀어냄으로 얻을 수 있게 된다.

$$A^T P + PA - PBR_L^{-1} B^T P + Q_L = 0. \quad (9)$$

식 (7)에 해당하는 가중치 Q_L 와 R_L 는 실험적으로 다음과 같이 선정했다.

$$\begin{aligned} Q_L &= \text{diag}(20, 100, 140, 2, 2, 20), \\ R_L &= 1. \end{aligned}$$

2. 균형점 간 천이 제어

2단 독립진자의 균형점에서 균형점 간 천이 제어는 [9]에서 제안한 비선형 앞먹임 제어와 되먹임 제어를 이용한 2-자유도의 제어체계를 사용하여 문제를 다룬다. 그림 6은 2-자유도 제어의 구조이다. 미리 계산된 이상적인 가속도 궤적 $u^*(t)$ 과 2단 독립진자의 예측된 상태 변수값 $x^*(t)$ 을 signal generator에서 기준 입력으로 인가한다. 예측된 상태 변수값과 실제 출력값과의 오차 $\Delta x(t) = x^*(t) - x(t)$ 에 맞춰 적절한 되먹임 보상을 통해 계산된 $\Delta u(t)$ 를 합쳐 실제 가속도 입력 $u(t) = u^*(t) + \Delta u(t)$ 을 생성한다. 이 제어 방식은 2단 독립진자에서 다음 상태로의 천이가 진행되도록 하는 과정에서 발생하는 불확실성으로 인해 계산된 경

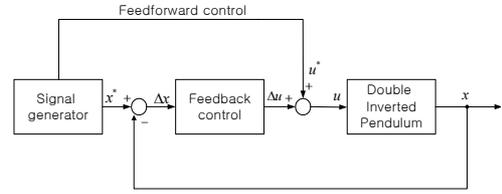


그림 6. 2-자유도 제어 구조.

Fig. 6. Two-degree-of-freedom control scheme.

로에서 실제 움직임과 다른 오차 값을 보상하여 제어의 건실성을 높이는 구조이다. 본 논문에서 앞먹임 궤적을 찾는 과정은 동역학적 제약조건을 고려하면서 다양한 구속 조건들을 만족시키고 원하는 비용함수를 수치적으로 최소로 만드는 비선형 최적제어 문제를 설정하고 이를 수치적으로 풀어 구하는 방식을 이용한다. 비선형 최적제어 문제의 수치적 풀이는 direct collocation 기법을 이용한다[17]. 이 방식은 특정 형태를 가정한 [9]의 방법과 달리 궤적의 형태에 제약이 없기 때문에 궤적의 수치해를 찾을 확률이 더 높은 장점을 가진다. 비용함수에서 사용되는 제약 및 구속 조건은 2단 독립진자의 동적 방정식 (2)를 포함하여 식 (10)과 같이 대차가 이동할 수 있는 레일의 총 길이, 구동기가 선형으로 동작할 수 있는 대차 이동속도의 한계와 같은 출력 제약과 입력 가속도의 입력 제약을 고려한다.

$$|x_1^*| \leq y_{lim}, \quad |x_4^*| \leq \dot{y}_{lim}, \quad |u^*| \leq u_{lim}. \quad (10)$$

이때 제한 값의 기준 크기는 양수로 $y_{lim} > 0$, $\dot{y}_{lim} > 0$, $u_{lim} > 0$ 각각 대차의 출력 범위, 출력 속도, 입력 가속도의 제한 값을 나타낸다. 본 논문에서 사용한 제한 값은 실험에 사용된 독립진자의 실제 환경을 반영하여 식 (11)과 같다.

$$y_{lim} = 0.3 \text{ [m]}, \quad \dot{y}_{lim} = 1.5 \text{ [m/s]}, \quad u_{lim} = 20 \text{ [m/s}^2\text{]}. \quad (11)$$

12가지의 전혀 다른 제약을 갖는 천이 제어 시 필요에 의해서 진자의 회전각 성분 θ_1, θ_2 과 그 회전 속도 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 까지 추가적인 제약을 줄 수 있다. 또한 천이 시작 시점($t = 0$)과 종료 시점($t = T$)에서 다음의 경계치 조건을 만족해야 한다. 현재 균형점을 EP0, 다음 균형점을 EP3으로 가정하면 식 (12)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x^*(0) &= [0, -\pi, 0, 0, 0, 0]^T, & x^*(T) &= [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \\ u^*(0) &= 0, & u^*(T) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Direct collocation 기법은 반복적으로 풀이되는 수치 해법이고 비선형 최적화 solver를 이용하여 수치 해법이 구현되므로 설계자가 제공하는 초기 궤적(initial trajectory)의 형태에 따라 풀이에 소요되는 시간, 해로 얻어지는 궤적의 형태가 달라질 수 있다. 설계자는 초기 궤적을 적절히 선정하여 direct collocation 기법을 적용함으로써 해당 천이 제어 문제에 자연스럽게 부합하는 궤적을 해로 얻을 수 있다. 본 논문에서 경계치 조건값의 시작과 끝을 잇는 직선을 이용하여 가장 기초적인 초기 궤적으로 설계한다. 그리고 제시한

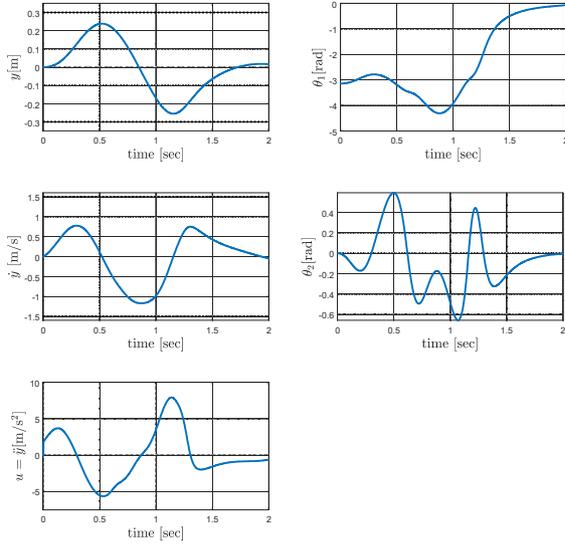


그림 7. EP0에서 EP3로 앞먹임 천이 궤적.
Fig. 7. Feedforward transition trajectories from EP0 to EP3.

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \quad & \mathcal{J}(x(t), u(t)) \\ \text{s.t.} \quad & \text{input/output constraint (10),} \\ & \text{dynamic equations (2),} \\ & \text{boundary conditions (12).} \end{aligned} \quad (13)$$

제약조건과 경계치 조건을 모두 만족하는 비용함수를 설계 하면 일반적인 비선형 최적제어 문제로 만들 수 있다. 식 (13)은 최적 궤적을 계산하기 위한 설정된 최적제어 문제의 예시이다. 여기서 $\mathcal{J}(x(t), u(t))$ 은 비용함수를 나타내며, 본 논문의 표 1에서 제공된 모델 계수를 이용하여 제약 조건을 만족하는 최적제어 문제의 해는 시간 최소화 비용함수와 주어진 시간을 활용하는 비용함수를 선택적으로 사용한다. 이를 통해 direct collocation 기법을 활용하여 최종적으로 구현하면 그림 7과 같이 천이 궤적을 구할 수 있다. 이렇게 천이 제어 문제에서 제약조건을 고려한 상태로 궤적을 생성함으로써 경계값 조건의 제약을 변경하여 원하는 균형점 간 천이 구현이 가능해진다. 그러나 계산된 천이 궤적이 지나치게 높은 입력값을 요구하거나 진자부가 목뿔값과 무관하게 2회 이상 회전하는 경우와 같이 비현실적인 상황이 발생할 수 있다. 이러한 경우 시간적 여유와 진자의 각도 제한, 각속도 제한을 추가하여 자연스럽게 연속적인 곡선을 그리는 궤적을 찾는 것을 목표로 한다. 이렇게 함으로써, Bang-Bang 제어와 같은 극단적인 값이 포함된 상황을 효과적으로 방지할 수 있다.

궤적 추종을 위한 되먹임 제어가 설계는 문헌 [9]의 방식과 유사하게 진행되며 시변 시스템의 최적제어 기법인 LQ 제어를 적용한다. [9]의 경우 이득 계수가 급격히 증가하는 구간에서 높은 보상 값으로 인해 제어 가능성을 상실한다고 판단하여 특정 구간에서 되먹임을 중단한다. 그러나 본 연구에서 천이 제어 구현 시 모든 구간에서 계산된 시변 LQ 제어 이득 값을 사용한다. 시변 LQ 제어기 설계는 direct collocation을 이용해 구한 천이 궤적 중심으로 식 (2)

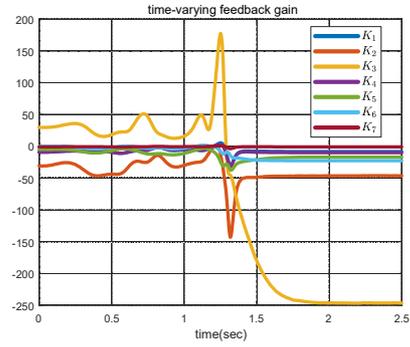


그림 8. EP0에서 EP3로 앞먹임 천이 궤적의 시변 LQ 이득.
Fig. 8. Time-varying LQ gain of feedforward transition trajectories from EP0 to EP3.

를 이용해 선형화된 시스템을 활용한다. 시간에 따라 변하는 상태방정식의 형태로 $A(t)$ 값과 $B(t)$ 값 또한 시변하게 되고 식 (14)처럼 표현할 수 있다.

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*(t), u^*(t)}, \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x^*(t), u^*(t)}. \quad (14)$$

여기서 $x^*(t)$, $u^*(t)$ 는 direct collocation을 이용해 구한 상태와 입력에 대한 앞먹임 궤적이다. 그리고 구해진 앞먹임 궤적과 상태 변수값의 오차 값은 $\Delta x(t)$ 이고 이 오차 값을 보상해

$$\Delta u(t) = -K(t)\Delta x(t). \quad (15)$$

여기서 시변 상태방정식을 식 (16)처럼 표현할 수 있다.

$$\dot{\Delta x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t). \quad (16)$$

여기서 비용함수는 식 (17)을 사용한다.

$$\begin{aligned} J = & \Delta x^T(T)H_T\Delta x(T) \\ & + \int_0^T \Delta x^T(t)Q_T\Delta x(t) + \Delta u^T(t)R_T\Delta u(t)dt. \end{aligned} \quad (17)$$

이때, 천이 과정의 설계 변수임을 나타내기 위해 첨자 T_r 를 사용하며, 식 (17)은 $H_{T_r} \geq 0$, $Q_{T_r} \geq 0$ 이고 $R_{T_r} > 0$ 을 만족한다. H_{T_r} 행렬은 종단 상태에 대한 가중치, Q_{T_r} 행렬은 상태에 대한 가중치, R_{T_r} 행렬은 입력에 대한 가중치를 표현한다. 가중치는 실험적으로 식 (18)로 설정한다.

$$\begin{aligned} Q_{T_r} = & \text{diag}(50, 300, 500, 1, 1, 1, 100), \\ R_{T_r} = & 1. \end{aligned} \quad (18)$$

그리고 시변 이득 $K(t)$ 를 구하기 위해선 식 (19)와 같은 differential Riccati equation을 풀어야 한다.

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) \\ & + P(t)B(t)R_{T_r}^{-1}B^T(t)P(t) - Q_{T_r}, \\ P(T) = & H_{T_r}. \end{aligned} \quad (19)$$

최종적으로 식 (20)으로 시변 이득 값 $K(t)$ 를 구할 수 있다. 앞선 그림 7에서 적용된 LQ 제어 이득 값 $K(t)$ 를 그림 8에 나타냈다.

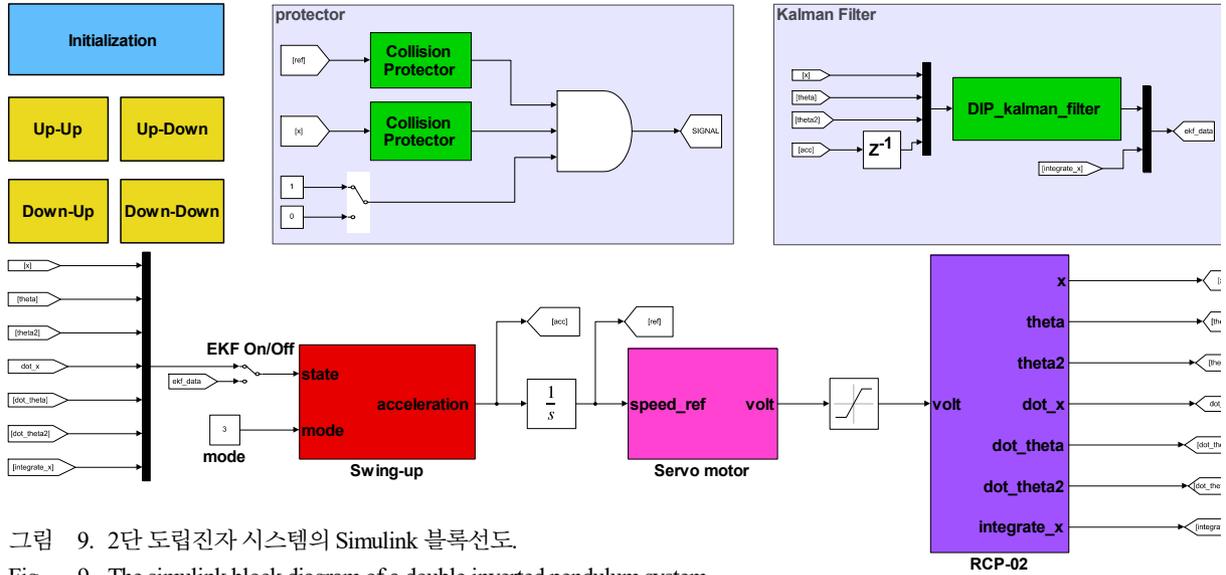


그림 9. 2단 도립진자 시스템의 Simulink 블록선도.
Fig. 9. The simulink block diagram of a double inverted pendulum system.

$$K(t) = R_{Tr}^{-1} B(t)^T P(t). \quad (20)$$

3. LW-RCP02 제어기 설계

2단 도립진자를 제어하기 위해서 필요한 입/출력으로는 실시간으로 3개의 encoder 값을 측정할 수 있어야 하고 1개의 PWM (Pulse-Width Modulation) 출력이 요구된다. PWM의 주파수는 20KHz를 이용하고 있으며, 제어 algorithm의 샘플링 주파수는 1KHz를 이용하였다. 실험에 사용된 전체 Simulink 구성은 그림 9로 구성했다. Swing-up block은 S-Function으로 구현하였다. S-Function은 Simulink 환경의 기능을 확장하기 위해 별도로 사용자가 제작하는 Simulink block이며 본 연구에 맞는 제어기 설계를 위해 C-Code를 이용해 구현하였다. 이 block에 인가하는 입력값 변화에 따라 12가지의 천이 제어기 중 하나가 실행된 후 선형 제어기로 전환되는 구조로 설계했다. Servo motor block는 PI 속도 제어기이며 LW-RCP02 block은 그림 10처럼 LW-RCP02의 block으로 구성된 입/출력부의 블록선도(block diagram)이다. 세 개의 encoder에서 받아온 값을 수학적 연산을 통해 SI 단위로 변환하여 이용하고, 원하는 전압 값을 duty ratio로 변환하여 BLDC driver에 출력하도록 설계되었다.

V. 실험 결과

그림 11은 이전의 그림 7에서 예측된 모델을 실제 연구실에서 제작된 2단 도립진자에 적용하여 실험한 결과를 보여준다. 각각의 선은 실선으로 그려진 예측된 모델 궤적, 파선으로 표시된 보상이 적용되지 않은 개루프(open-loop) 궤적, 그리고 일점 쇄선으로 표현된 보상이 적용된 폐루프(closed-loop) 궤적을 나타낸다. 보상을 적용하지 않은 개루프의 경우, 예측된 가속도 입력 값을 적분한 형태로 속도 기준값 신호를 주게 되고, PI 속도 제어기를 이용하여 진자의 상태와 상관없이 속도 값을 추종하게 된다. 이로 인해 대차의 변위 y 와 속도 \dot{y} 은 높은 정확도를 보이지만, 1단부

와 2단부 진자는 목표값에 도달하지 못하고 발산한다. 도립진자의 상태 천이는 현재 균형점에서 다음 균형점으로의 목표 도달이 최우선 과제이므로, 진자가 목표 궤도로 천이하기 위해서는 페루프로 구성하여 입력값을 적절히 보상해야 한다. 페루프 구성 결과, 최초로 도달한 대차의 변위 y 값은 목표값과의 오차가 발생하지만, 천이 이후 균형점에서 선형 제어를 통해 오차 값이 0으로 수렴하도록 이동한다. 이 정상상태의 오차를 빠르게 없애기 위해 $\int_0^t y(\tau) d\tau$ 를

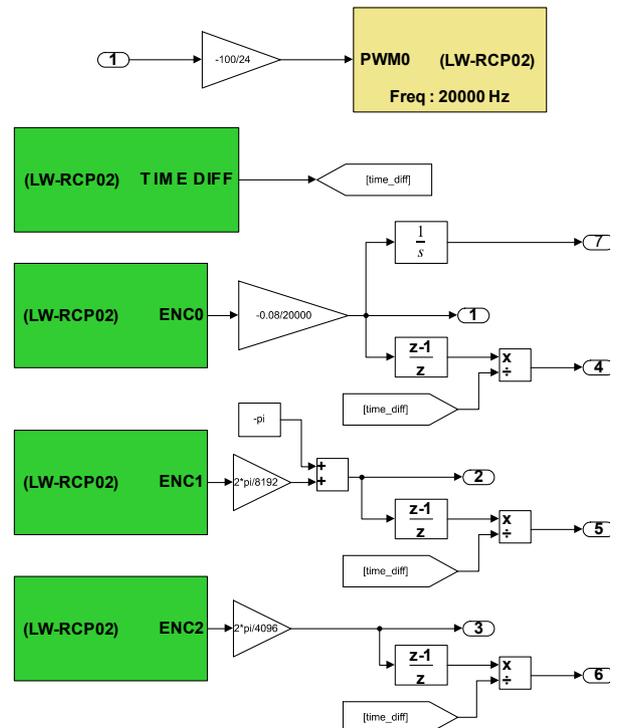


그림 10. LW-RCP02의 내부 블록선도.
Fig. 10. The inside block diagram of the LW-RCP02.

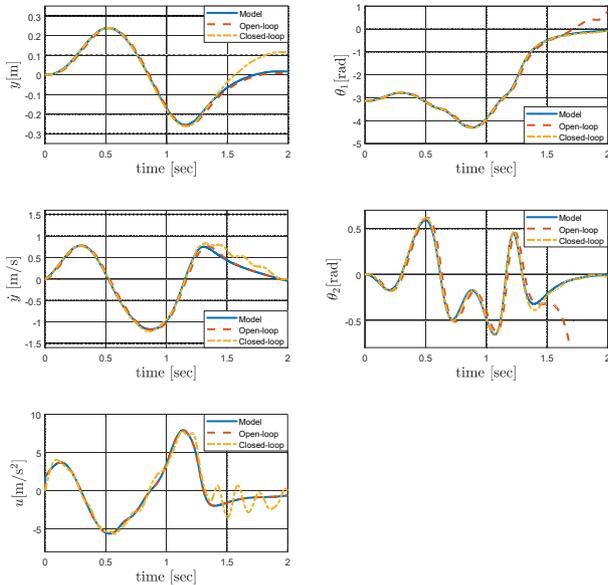


그림 11. EP0에서 EP3로 앞먹임 천이 결과 : 모델 궤적(실선), 개루프 궤적(파선) 페루프 궤적(일점 쇄선).
 Fig. 11. Transition trajectories from EP0 to EP3 : model trajectory (solid line), open-loop trajectory (dashed line), closed-loop trajectory (dot-dashed line).

추가로 구성하였다. 이렇게 함으로써, 더욱 자연스럽게 정확한 진자의 궤적 추종이 이루어지게 된다.

본 논문에서 제시한 12개의 천이 궤적 경로는 그림 12의 순서도에 따라 구성한다. 각 균형점 간 천이 경로는 한 번씩만 이동하며, 상태 천이와 균형점 선형 제어의 한 주기를 6초로 설정한다. 상태 천이에 소요되는 각각의 시간은 표 2에서 나타냈다. 최소 1.500초에서 최대 2.358초까지 다양하게 분포하고 있으며, 이후의 시간 동안에는 균형점의 선형 제어를 통해 시스템이 안정화될 수 있도록 한다. 첫 상태 천이는 1초 시점에서 시작된다. 그림 14는 천이 제어의 모든 결과를 연속적으로 보여준다. 각각의 선은 실선으로 그려진 예측된 모델 궤적 그리고 일점 쇄선으로 표현된 보상이 적용된 페루프 궤적을 나타낸다. 페루프에 의한 보상의 영향으로 대차의 변위 y 값과 속도 \dot{y} 는 상태 천이 이후에 큰 차이를 보이지만, 이후 균형점 선형 제어를 통해 y 값이 점차 0에 근접하는 것을 확인할 수 있다. 더불어, 중요한 변수인 θ_1 와 θ_2 의 결

표 2. 논문에서 사용된 천이 시간.

Table 2. The transition time used in the paper.

Starting EP	Destination EP	T [sec]	Starting EP	Destination EP	T [sec]
	EP1	1.778	EP0	EP0	2.300
EP0	EP2	2.000	EP2	EP1	1.500
	EP3	2.358		EP3	1.700
	EP0	1.500	EP0	EP0	2.000
EP1	EP2	1.500	EP3	EP1	1.500
	EP3	1.500		EP2	1.800

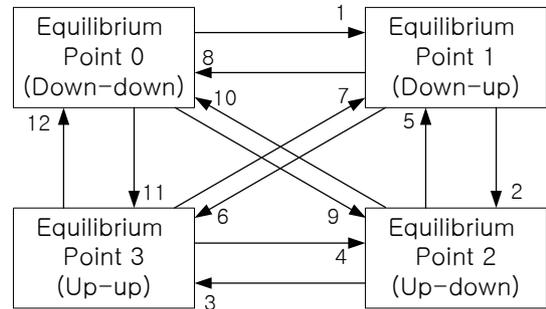


그림 12. 2단 도립진자의 12가지 천이 순서도.
 Fig. 12. 12-step transition diagram of a double inverted pendulum.

과 그래프는 예측된 경로와 매우 정확하게 추종하는 경향을 나타낸다. 가속도 입력 u 는 페루프 구성 시 매시간 차이를 보상해 주기 때문에 노이즈와 같은 형태의 그래프를 생성한다.

본 연구에 대한 상세한 실험 영상은 Youtube (영상 제목: Swing-up control of the double inverted pendulum: Simulation Vs. Experiment, 채널명: Embedded Control Lab., 영상 주소: <https://youtu.be/e7669NPbENY>)에서 확인할 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 자체 제작한 LW-RCP02와 2단 도립진자를 활용하여 저비용으로 실제 2단 도립진자 실험 환경을 구축하였으며 새롭게 천이 제어를 제안하고 실험적으로 구현하였다. 천이 제어를 위한 2-자유도의 제어체계는 앞먹임 제어와 뒤먹임 제어를 사용하였고 문헌 [9]의 내용과 달리 모든 구간에서 뒤먹임을 적용해도 제어 가능성을 잃지 않았고 이는 모든 천이과정에서 동일하게 적용하였다. 선형제어는 각 균형점에서 구해진 선형 시불변 시스템에서의 최적 제어로 구현하였다. 2단 도립진자의 제어 algorithm은 Simulink block을 활용하여 구성하였고 이를 LW-RCP02와 통합하여 하드웨어 입/출력 장치를 손쉽게 제어할 수 있도록 하여 실험 환경을 간편하게 구성하였다. 개루프 환경에서의 실험 결과, 미리 계산된 대차의 변위 y 는 높은 정확

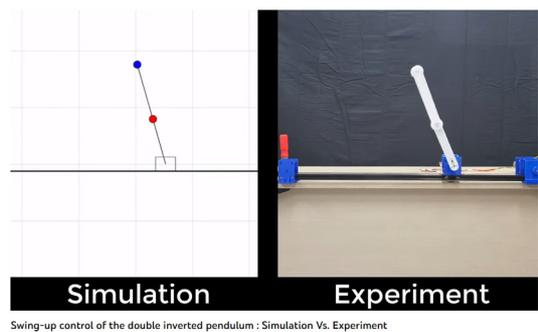


그림 13. 2단 도립진자의 12가지 천이 실험 Youtube 영상.
 Fig. 13. YouTube video of 12 transition experiments on a double inverted pendulum.

도로 추종하였으나 중요한 진자 상태인 θ_1 과 θ_2 값은 독립 진자의 불안정 특성으로 인해 발산하였다. 시변 시스템의 최적 제어기 LQ 제어를 이용하여 값을 적절히 보상한 페루프 구성을 통해 θ_1 과 θ_2 값이 목표값에 높은 정확도로 수렴하는 것을 확인하였다. 단, 가속도 값 보상 결과 대차의 변위는 천이 최종 예측값과 차이가 있었으나 시불변 시스템에서의 최적 제어기 LQ 제어를 통해 원하는 기준값으로 수렴시켰다. 최종적으로 2단 독립진자의 4개 균형점에서 다음 균형점으로 이동할 수 있는 12가지 경로를 각각 6초 동안 총 72초간 연속 제어하면서 LW-RCP02 환경을 이용한 제어 가능성을 입증하였다.

본 논문에서 제안한 천이 제어는 기존 swing-up 연구보다 다양한 경로의 궤적이 존재하며 향후 지속적인 연구가 가능한 분야이다. 강화학습을 통한 인공지능 기반의 제어 기법과 강인성을 향상시킨 슬라이딩 모드 제어(sliding mode control)등의 제어 기법을 검증함에 있어 유용하게 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

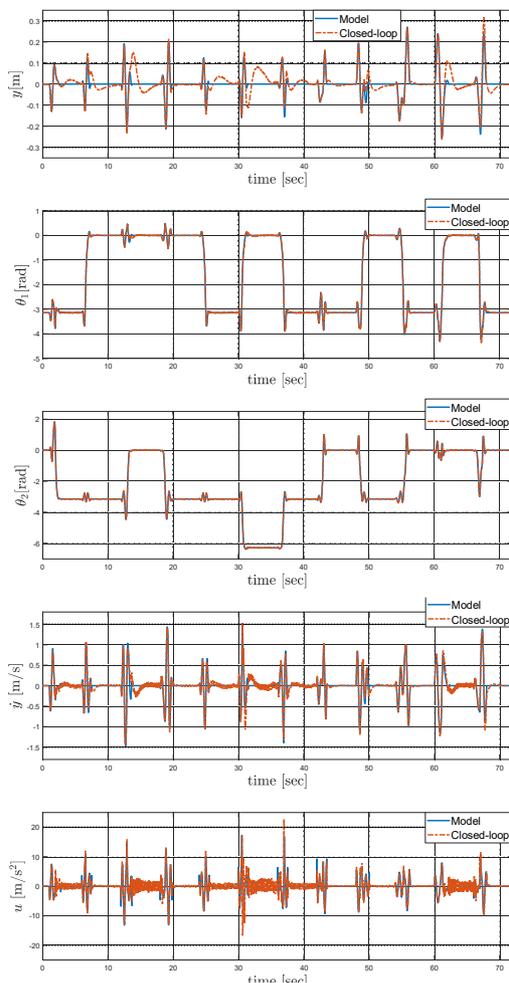


그림 14. 2단 독립진자의 12가지 천이 결과 : 모델 궤적(실선), 실제 궤적(일점 쇄선).

Fig. 14. 12-step transition trajectories of a double inverted pendulum: model trajectory (solid line), actual trajectory (dot-dashed line).

REFERENCES

- [1] Y. S. Lee, J. J. Oh, S. Y. Shim, H. Lim, and J. H. Seo, "Swing-up control for a rotary inverted pendulum with restricted rotation range," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 14, no. 6, pp. 548-553, 2008.
- [2] T. Meta, G. Y. Gyeong, J. H. Park, and Y. S. Lee, "Swingup control of an inverted pendulum subject to input/output constraints," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 20, pp. 835-841, 2014.
- [3] Y. S. Oh and Y. S. Lee, "Robust swing-up control of a rotary inverted pendulum subject to input/output constraints," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 24, pp. 423-430, 2018.
- [4] Y. Otani, T. Kurokami, A. Inoue, and Y. Hirashima, "A swingup control of an inverted pendulum with cart position control," *Proc. of the IFAC Conference on New Technologies for Computer Control*, pp. 13-22, 2001.
- [5] J. H. Yang, S. Y. Shim, J. H. Seo, and Y. S. Lee, "Swing up control for an inverted pendulum with restricted cart rail length," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 70, no. 4, pp. 674-680, 2009.
- [6] T. Henmi, M. Deng, and A. Inoue, "Swing-up control of a serial double inverted pendulum," *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, vol. 24, pp. 3992-3997, 2004.
- [7] M. Yamakita, K. Nonaka, and K. Furuta, "Swing up control of a double pendulum," *1993 American Control Conference*, pp. 2229-2233, 1993.
- [8] P. Jaiwat and T. Ohtsuka, "Real-time swing-up of double inverted pendulum by nonlinear model predictive control," *5th International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes*, 2014.
- [9] K. Graichen, M. Treuer, and M. Zeitz, "Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation," *Automatica*, vol. 43, pp. 63-71, 2007.
- [10] T. Glück, A. Eder, and A. Kugi, "Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation," *Automatica*, vol. 49, pp. 801-808, 2013.
- [11] D. Ju, C. Choi, J. Jeong, and Y. S. Lee, "Design and parameter estimation of a double inverted pendulum for model-based swing-up control," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 28, no. 9, pp. 793-803, 2022.
- [12] Y. S. Lee, J. H. Yang, S. Y. Kim, W. S. Kim, and O. K. Kwon, "Development of a rapid control pro-totyping system based on matlab and USB DAQ boards," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol.

24, pp. 912-920, 2012.

- [13] Y. S. Lee, B. Jo, and S. Han, "A light-weight rapid control prototyping system based on open source hardware," *IEEE Access*, vol. 5, no. 1, pp. 11118-11130, 2017.
- [14] J. Khan, "Rapid Control Prototyping (RCP) solutions for the validation of motor control applications," *2016 International Conference on Emerging Technological Trends (ICETT)*, pp. 1-6, 2016.
- [15] Z. Tong, H. Zhang, Z. Ye, and J. Han, "RCP-based HIL simulation and control for 2-DOF tracking robot of maneuvering target," *2009 International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, pp. 121-125, 2009.
- [16] Z. Shutao, H. Qitao, C. Dacheng, and H. Junwei, "Experiment and study of control loading system in a flight simulator based on RCP," *2007 IEEE International Conference on Integration Technology*, pp. 208-212, 2007.
- [17] M. Kelly, "An introduction to trajectory optimization: How to do your own direct collocation," *SIAM Review*, vol. 59, no. 4, pp. 849-904, 2017.



정 종 익

2022년 인하대학교 전기공학과 졸업.
2022~현재 인하대학교 대학원 전기컴퓨터공학과 석사과정 재학 중. 관심분야는 비선형 제어, 최적제어, 임베디드 시스템.



주 도 윤

2023년 인하대학교 대학원 전기컴퓨터공학 석사 졸업. 2023년~현재 동 대학원 박사과정 재학중. 관심분야는 최적제어, 임베디드 시스템, 강화학습.



Yusuke Fujiyama

2022년 인하대학교 전기공학과 졸업.
2022년~현재 인하대학교 대학원 전기컴퓨터공학과 석사과정 재학 중. 관심분야는 임베디드 시스템, 최적제어, 비선형 제어.

이 영 삼

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지, 제15권 제4호 참조.