


구동기 불확실성에 강건한 2-자유도 도립진자 제어 시스템의 구현

Implementation of 2-DOF Inverted Pendulum Control System Robust Against Actuator Uncertainties

이 창 현, 이 영 삼* 

(ChangHyeon Lee¹ and YoungSam Lee^{1,*})

¹Department of Electrical Engineering, Inha University

Abstract: In this paper, we propose an implementation method for a 2-DOF pendulum control system that is robust against actuator uncertainties. In order to guarantee the robustness against the uncertainty of the actuator, we derive a model in which the robot body's acceleration is the system's control input. We then verify its validity by implementing a 2-DOF pendulum system using an omni-directional robot(ODR). The 2-DOF pendulum system can be stabilized without a mathematical model of the actuator in the proposed method. Therefore, it is possible to eliminate uncertainty in the actuator parameters. Furthermore, the method provides the advantages of flexible selection of motors used as actuators. First, we design a mechanical part to measure the angular velocity of the motor and to measure the inclination of an inverted pendulum. Second, we derive a mathematical model of a 2-DOF pendulum system for acceleration which the control input. The controller adopts the Linear Quadratic Regulator(LQR) to obtain the acceleration required for stabilization. The determined acceleration is converted to the velocity references of wheels through integration and transformation. The velocity references are followed through PI-velocity controllers. Third, the control system is implemented using the open source hardware Nucleo-32 F303K8 board. We illustrate the proposed control system's effectiveness through stabilization experiments.

Keywords: omni-directional robot, 2-DOF pendulum, LQR, robust, actuator


I. 서론

도립진자 제어 시스템은 불안정한 시스템이며 비선형적 특성을 가지고 있어, 학자들이 특정형태의 제어기 설계 및 제어 기법의 효용성을 검증하기 위한 수단으로 자주 이용되어 왔다[1-9]. 도립진자 제어 시스템은 구동유형에 따라 다양한 형태를 가지는데, 도립진자를 제어하기 위해서는 구동부를 정확하게 제어하는 것이 매우 중요하다. 따라서 도립진자 시스템 뿐만 아니라 구동부와 구동기의 수학적 모델 유도 및 파라미터 측정에도 집중해야 한다. 도립진자 시스템에 대한 연구[1,2]는 구동기의 종류와 모델방정식을 직접적으로 기술하였으며, X-Y plate 로봇 기반 도립진자[3], 로봇 팔 기반 도립진자[4,5], Furuta 도립진자[6], 반작용 휠 기반 도립진자[7], Five-bar 기반 도립진자[8], 카트형 도립진자[9]시스템에 관한 연구 논문은 제어 입력을 구동기에 의해 발생하는 토크로 설정하였다. 따라서 이를 구현하기 위해서는 구동기에 가해지는 전압 및 전류와 토크와의 관계를 기술하는 모델방정식이 필요하다. 이는 구동기 파라미터의 불확실성은 도립진자 시스템의 제어에 어려움을 야기할 수 있음을 나타내며, 활용하는 구동기의 종류를 변경할 경

우 새로운 모델방정식을 유도해야 하는 번거로움이 존재함을 의미한다. 이에 본 논문에서는 구동기의 파라미터 불확실성에 강인한 전방향 주행체 기반 2-자유도 도립진자 시스템의 구현방법을 제안한다. 여기서 전방향이란 모든 방향, 즉 omni-directional의 의미를 나타낸다. 구동기의 파라미터 불확실성에 강인함을 보장하기 위해 본 논문에서는 Lagrange 역학에 기반하여 ODR의 가속도를 제어입력으로 가지는 수학적 모델을 제시하고, 이를 이용하여 2-자유도 도립진자 시스템에 대한 모델기반 제어기법을 제안한다. 제어기를 통해 구한 가속도는 ODR의 운동역학을 활용하여 구동기의 속도 reference로 변환하고 구동기의 속도제어를 통해 이 reference를 추종하게끔 하여 안정화 제어를 수행하도록 제어기 구조를 구성한다. 본 논문에서 활용하는 속도 제어기의 경우 단순히 속도 추종 오차를 PI제어기를 통해 인가 전압으로 변환하는 방식으로, 기존의 모델 기반 모델기반 제어방식과 달리 구동기 모터의 전기적 계수를 필요로 하지 않아 구동기의 파라미터 불확실성으로 인한 영향 또한 제거할 수 있다. 또한 제안하는 방식은 속도제어기만 구성할 수 있으면 구동기의 종류에 관계없이 적용할 수 있

*Corresponding Author

Manuscript received January 22, 2018; revised March 21, 2018; accepted March 22, 2018

이창현, 이영삼: 인하대학교 전기공학과(leechanghyeon@nate.com, lys@inha.ac.kr,  0000-0003-0665-1464)

※ 본 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2017R1D1A1B03029578).

으므로 이를 통해 구동기로 사용되는 모터 선택의 다양성을 확보할 수 있다. 제안하는 모델링 기법은 속도제어기 성능이 중요하므로 모터의 속도를 정확하게 측정할 수 있는 엔코더의 성능이 핵심이라 할 수 있다. 이에 본 논문에서는 Pololu사의 6bit 분해능 엔코더가 장착된 DC모터를 자기식 엔코더를 활용하여 12bit 분해능으로 성능을 향상시키는 방식을 활용한다. 2-자유도로의 움직임이 가능하며, 도립진자의 기구기를 측정할 수 있는 기구부의 제작 방법을 제안한다. 다양한 제어 응용 분야에서 활용된 LQR 기법을 활용하여 구현된 시스템을 제어하기 위한 적정 PD계수를 선정하는 방식을 제안한다[11,12]. 구현된 PD제어기를 활용해 ODR의 가속도를 구하고, ODR의 운동역학에 따라 각 구동기의 속도 레퍼런스를 유도하는 방법을 제안한다. 이를 STM사의 Nucleo-32 F303K8 보드를 활용하여 구현하고, disturbance rejection 실험을 수행하여 제어기의 성능을 시연한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. II절에서는 구동기 성능 향상을 위한 기구부와 2-자유도 도립진자의 기구기를 측정하는 기구부 및 센서부의 구현방법을 제안한다. III절에서는 Euler-Lagrange 역학을 이용한 2자유도 도립진자의 모델링 및 전방향 주행체의 운동학적 특성을 기술하고 V절에서는 LQR을 이용하여 최적 튜닝된 PD 제어기의 설계에 대해 다룬다. VI절에서는 제안된 방법을 실제 시스템에 적용하여 안정화 제어 실험을 수행하고 제어 성능을 살펴본다. 마지막으로 VII절에서 결론을 맺는다.

II. 하드웨어 설계

이 절에서는 도립진자 시스템의 하드웨어 설계 방법을 기술한다. 구동기는 Pololu사의 DC모터를 활용한다. 본 논문에서 활용하는 속도제어기의 특성상 실제 모터의 회전 속도를 측정하는 엔코더의 성능이 핵심이다. 기존의 6bit 분해능의 엔코더를 개조하여 12bit 분해능의 자기식 엔코더를 부착하였다. 도립진자의 2-자유도 운동을 구현하고 기구기를 측정할 수 있는 기구부를 연구실에서 자체 제작하였다.

1. 구동기

본 논문에서 활용하는 ODR은 Pololu사의 기어비 30:1의 엔코더 부착형 DC모터를 구동기로 사용한다. Pololu사의 DC모터는 저가형이며, 낮은 전압레벨에서도 효율적인 토크를 생성하여 구동기로 사용하기에 적합하다. 모터에 부착된 엔코더는 6bit의 낮은 분해능을 가진다. 낮은 분해능의 엔코더는 속도제어기 성능의 저하를 야기한다. 이에 본 논문에서는 별도의 자기식 엔코더를 활용하여 속도 측정 성능을 향상시키기 위한 방법을 이용한다. 부착 방식은 다음과 같다. 첫째, 그림 1과 같이 Pololu DC모터의 자기식 엔코더 덮개를 제거하여 원형 자석을 노출시킨다. 둘째, 노출된 원형자석에 3D 프린터를 이용하여 제작한 어댑터를 이용하여 그림 2와 같은 별도의 영구자석을 부착한다. 셋째, 자기식 엔코더 AS5145B 기반의 PCB를 지지하기 위한 기구부를 모터축에 고정한다. 그림 2는 자기식 엔코더를 부착한 DC모터를 나타낸다.

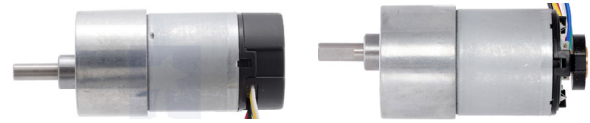


그림 1. 엔코더 부착형 DC모터: (좌) 덮개 제거 전, (우) 덮개 제거 후.

Fig. 1. DC motor with an encoder: (left) before removing the cap (right) after removing the cap.

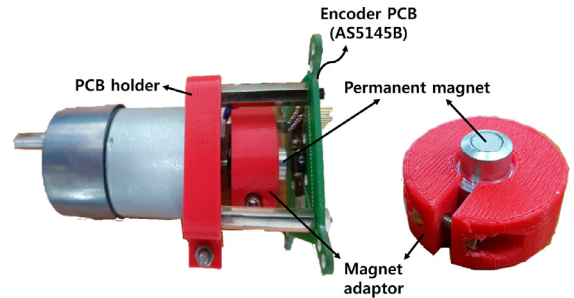


그림 2. 자기식 엔코더를 추가 부착한 DC 모터와 영구자석 어댑터.

Fig. 2. DC motor with an added magnetic encoder and the adaptor for the permanent magnet.

2. 2-자유도 모듈

도립진자의 2자유도 운동을 구현하고 기구기를 측정하기 위한 기구를 설계한다. 구현된 기구는 그림 3과 같다. 도립진자는 샤프트홀더에 고정된 기구에 나사형식으로 조립되며, 이 기구부는 샤프트와 베어링에 2-자유도로 기울어 질 수 있다. 기구기를 측정하기 위해서 자기식 엔코더를 활용한다. 샤프트의 끝 부분에 영구자석을 부착하고 그에 맞물려 자기식 엔코더 PCB인 AS5145B를 부착하여 도립진자의 기구기를 측정한다.

III. 모델링

III절에서는 Euler-Lagrange 역학을 이용하여 2-자유도 도립진자 시스템의 수학적 모델을 기술한다. 도립진자 시스템의 수학적 모델은 아래의 가정을 기반으로 기술한다.

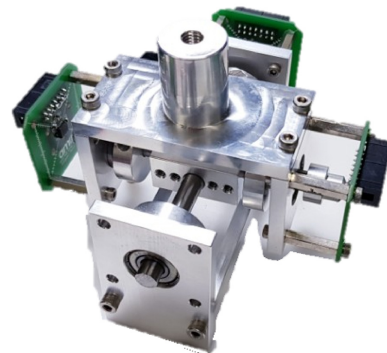


그림 3. 자기식 엔코더가 장착된 2-자유도 모듈.

Fig. 3. 2-DOF module with magnetic encoders attached.

- (1) 도립진자의 질량은 무게중심(COG: Center Of Gravity)에 집중되어 있다.
- (2) 도립진자에 작용하는 마찰력은 무시한다.
- (3) 전방향 주행체의 높이는 존재하지 않는다.

1. 도립진자의 회전행렬(Rotation matrix)

도립진자 무게중심의 위치를 효율적으로 표현하기 위해, 본 논문에서는 오일러 각(Euler angle) 표기방식을 활용한다. 그림 4는 2-자유도 모듈의 운동을 반영한 COG의 위치를 나타낸다. 그림 4(a)는 평형상태에 위치한 도립진자를 나타낸다. 이 때, 도립진자의 현재 좌표계(Current frame)은 (x_0, y_0, z_0) 이고 도립진자는 z_0 축에 고정되어 있다. 그림 4(b)는 도립진자를 평형상태에서 x 축 기준으로 θ 만큼 회전시킨 것을 나타낸다. 이 때, 도립진자의 좌표계는 (x_1, y_1, z_1) 으로 이동하고 COG는 z_1 축에 위치한다. 그림 4(c)는 z_1 축에 고정된 도립진자를 y 축 기준으로 ϕ 만큼 회전시킨 것을 나타낸다. 이 때, 도립진자의 좌표계는 (x_2, y_2, z_2) 로 이동하고 COG는 z_2 축에 위치한다. 그림 4(d)는 변환된 도립진자의 최종 위치를 나타낸다. 따라서 도립진자의 회전행렬은 식 (1)과 같다[13].

$$R_{rot} = R_{x,\theta}R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta & -\sin \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (1)$$

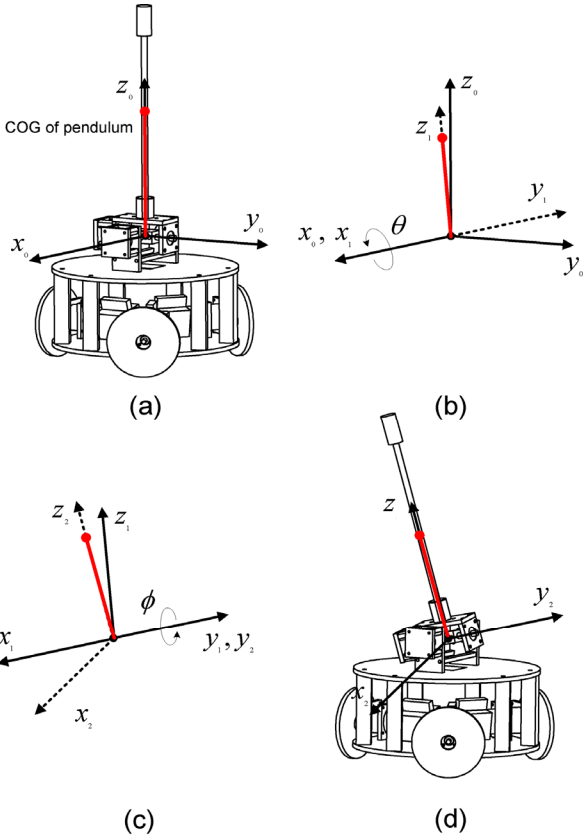


그림 4. 2-자유도 모듈의 운동을 반영한 도립진자의 위치.
Fig. 4. Position of the inverted pendulum based on the motion of the 2-DOF module.

2. Euler-Lagrange 역학을 이용한 비선형 모델 유도

Euler-Lagrange 역학은 식 (2)와 같이 표현된다[13]. 라그랑지안(Lagrangian) L 은 식 (3)과 같다. 여기서 K 는 도립진자 시스템의 운동에너지, P 는 위치에너지를 나타낸다. 또한 q 는 일반화 좌표, i 는 일반화 좌표를 나타내는 지표이며, τ 는 보존력이 아닌 일반화 힘을 뜻한다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$L = K - P = K_c + K_p + K_r - P. \quad (3)$$

K_c 는 주행체의 병진운동에너지를 나타내며, 이는 식 (4)와 같이 표현할 수 있다. x, y, z 는 각각 전역 좌표계(Global coordinate)에서 전방향 주행체의 위치를 나타내며, M 은 전방향 주행체의 질량을 나타낸다.

$$K_c = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (4)$$

K_p 는 도립진자의 병진운동에너지를 나타내며, 식 (5)와 같이 나타낸다. m 은 도립진자의 질량을 나타내며, v_p 는 도립진자의 이동속도를 표현한다.

$$K_p = \frac{1}{2} m v_p^T v_p. \quad (5)$$

주행체가 (x, y, z) 에 위치할 때, 전역 좌표계에서 도립진자의 COG 위치는 식 (6)과 같이 나타낸다. 도립진자의 이동속도는 무게중심 위치를 미분해서 구할 수 있으며, 무게중심의 병진운동속도는 식 (7)과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + R_{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \sin \theta \\ -l \sin \theta \cos \phi \\ l \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$v_p = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + l \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{y} - l \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} + l \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ -l \sin \theta \cos \phi \dot{\theta} - l \cos \theta \sin \phi \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

K_r 은 도립진자의 회전운동에너지를 나타낸다. K_r 은 도립진자의 관성모멘트와 회전속도에 따라 결정되며, 식 (8)과 같이 나타낸다.

$$K_r = \frac{1}{2} w^T I w. \quad (8)$$

이 때, w 는 도립진자의 회전 각속도, I 는 도립진자의 관성 모멘트를 나타낸다. 도립진자의 회전각속도 w 는 Skew symmetric matrix[13]를 이용하여 구할 수 있으며, 이는 식 (9)와 같다.

$$w = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ (\cos \theta) \dot{\phi} \\ (\sin \theta) \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

현재 좌표계의 z_c 는 도립진자에 고정되어 있고, 전방향 주행체는 x_y, y_y 방향의 2-자유도로 이동하므로 z_c 축 기준으

로의 회전이 발생하지 않는다. 또한 도립진자는 원통 모양으로 x_g, y_c 축 방향으로의 관성이 동일하다. 이에 관성 텐서(Inertia tensor)의 비대각 성분과 z_c 기준 회전관성 성분을 0이라고 가정할 수 있으며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

도립진자의 회전행렬은 R_{rot} 이므로, 관성텐서와 회전행렬의 관계에 의해 도립진자의 관성모멘트는 식 (11)과 같이 나타난다[9].

$$I = R_{rot}^T I_0 R_{rot}. \quad (11)$$

식 (9)와 식 (10)을 식 (8)에 대입하여 식 (12)와 같이 도립진자의 회전운동에너지를 나타낼 수 있다.

$$K_r = \frac{1}{2} w^T R_{rot}^T I R_{rot} w = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + \dot{\phi}^2). \quad (12)$$

시스템의 위치 에너지(potential energy)는 중력에 의한 진자의 위치 에너지만이 존재하며, 이는 식 (13)과 같다. g 는 중력가속도, l 은 진자의 기준점으로부터 무게중심까지의 거리이다.

$$P = mgz_p = mgl \cos \theta \cos \phi. \quad (13)$$

식 (3)-(13)을 활용하여, 식 (2)의 Euler-Lagrange 방정식을 해결하면 식 (14)와 같은 비선형 방정식을 구할 수 있다. 이 때, 상태변수 $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \theta, q_4 = \phi$ 이다.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau. \quad (14)$$

$D(q), C(q, \dot{q}), g(q), \tau$ 는 식 (15)와 같이 나타난다.

$$D(q) = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & D_{14} \\ 0 & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ 0 & D_{32} & D_{33} & 0 \\ D_{41} & D_{42} & 0 & D_{44} \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{14} \\ 0 & 0 & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & C_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

여기서 변수들의 의미는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_{11} &= M+m, \\ D_{14} &= ml \cos(\phi), \\ D_{22} &= M+m, \\ D_{23} &= -ml \cos(\theta) \cos(\phi), \\ D_{24} &= ml \sin(\theta) \sin(\phi), \\ D_{32} &= -ml \cos(\theta) \cos(\phi), \\ D_{33} &= \cos^2(\phi)(ml^2 + I), \\ D_{41} &= ml \cos(\phi), \\ D_{42} &= ml \sin(\theta) \sin(\phi), \\ D_{44} &= ml^2 + I, \\ C_{14} &= -ml \sin(\phi) \dot{\phi}, \\ C_{23} &= ml(\sin(\theta)\theta \cos(\phi) + 2\cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}), \\ C_{24} &= ml(2\cos(\theta)(\dot{\theta})\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)(\dot{\phi})), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_{33} &= -2\cos(\phi)\sin(\phi)(\dot{\phi})(ml^2 + I), \\ C_{34} &= -2\cos(\phi)(\dot{\theta})\sin(\phi)(ml^2 + I), \\ C_{43} &= \cos(\phi)\dot{\theta}\sin(\phi)(ml^2 + I), \\ g_3 &= mgl \cos(\phi) \sin(\theta), \\ g_4 &= mgl \cos(\theta) \sin(\phi). \end{aligned}$$

그리고 F_x, F_y 는 각각 x, y 축 방향으로 가해지는 힘을 의미한다.

3. 가속도를 제어입력으로 가지는 모델 유도

가속도를 제어입력으로 가지는 수학적 모델을 유도하여 구동기의 파라미터 불확실성에 강인한 제어를 설계한다. 전방향 주행체의 가속도 \ddot{x}, \ddot{y} 을 새로운 제어입력 u_1, u_2 로 설정한다. 이를 식 (15)에 대입하여 $\ddot{\theta}, \ddot{\phi}$ 과 u_1, u_2 의 관계를 식 (17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\beta_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} u_2, \\ \ddot{\phi} &= \frac{\beta_2}{\alpha_5} - \frac{\alpha_3}{\alpha_5} u_1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_5} u_2 \end{aligned} \quad (17)$$

이며, 각 파라미터의 의미는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= D_{32}, \\ \alpha_2 &= D_{33}, \\ \alpha_3 &= D_{41}, \\ \alpha_4 &= D_{42}, \\ \alpha_5 &= D_{44}, \\ \beta_1 &= \cos(\phi)(2ml^2\dot{\theta}\sin(\phi)\dot{\phi} + 2\dot{\theta}\sin(\phi)\dot{\phi} + mgl \sin(\theta)), \\ \beta_2 &= -\sin(\phi)(ml^2\dot{\theta}^2 \cos(\phi) + \dot{\theta}^2 \cos(\phi)I - mgl \cos(\theta)). \end{aligned}$$

안정화된 상태에서 전역 좌표계 z 축과 도립진자 사이의 각도는 매우 작다고 가정한다. 따라서 $\theta, \phi \approx 0$ 이므로 $\cos \theta \approx 1, \cos \phi \approx 1, \sin \theta \approx \theta, \sin \phi \approx \phi, \theta \phi \approx 0, \dot{\theta} \dot{\phi} \approx 0$ 를 식 (17)에 대입하면 식 (18)과 같은 선형 상태 방정식을 구할 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (18)$$

여기서 x, A, B, u 는 다음과 같다.

$$x = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{mgl}{ml^2 + I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{mgl}{ml^2 + I} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml}{ml^2 + I} \\ 0 & 0 \\ -\frac{ml}{ml^2 + I} & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

표 1. 시스템 파라미터.

Table 1. System parameters.

Parameter	Value
M	4.3 kg
m	0.233 kg
l	0.3 m
I	0.0148 kgm^2
g	9.8 m/s^2

이 때, 시스템 파라미터는 표 1과 같다.

4. 전방향 주행체의 운동역학(Kinematics)

전방향 주행체의 운동역학을 기술한다. 가속도를 제어입력으로 가지는 수학적 모델을 활용하여 도립진자의 안정화 제어를 수행하므로 ODR의 동역학적 특성 및 구동기의 수학적 모델을 고려할 필요가 없으며, 이는 구동부의 동역학적 특성 및 구동기의 파라미터 불확실성에 강인한 제어를 설계할 수 있음을 의미한다. 2-자유도 도립진자 시스템의 가속도를 제어하기 위해서는 3개의 옴니 휠의 회전속도와 전방향 주행체의 속도 사이의 관계식이 필요하다. 그림 5는 전방향 주행체의 개념도를 나타낸다. v 는 전방향 주행체의 전후방향 속도, v_n 은 측방향 속도, ψ 는 회전속도를 나타낸다. 또한 v_0, v_1, v_2 는 각 바퀴의 회전으로 발생하는 선형 속도를 나타내며, d 는 전방향 주행체의 중심으로부터 바퀴 중심까지의 거리이다. 전방향 주행체의 v, v_n, ψ 가 결정 되었을 때, v_0, v_1, v_2 의 정기구학(forward kinematics)은 식 (19)와 같이 나타난다[14].

$$\begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) & d \\ 0 & -1 & d \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ v_n(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

전방향 주행체의 v_0, v_1, v_2 가 결정되었을 때, 전방향 주행체의 역기구학은 식 (20)과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(v_2(t) - v_0(t)), \\ v_n(t) &= \left(\frac{1}{3}\right)(v_2(t) + v_0(t)) - \left(\frac{2}{3}\right)v_1(t), \\ \psi(t) &= \left(\frac{1}{3d}\right)(v_0(t) + v_1(t) + v_2(t)). \end{aligned} \quad (20)$$

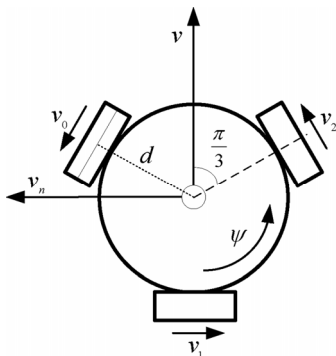


그림 5. 전방향 주행체의 개념도.

Fig. 5. Schematic diagram of an omni-directional robot.

IV. LQR 해법을 이용한 PD제어기 설계

2-자유도 도립진자 시스템의 안정화 및 추종제어를 위한 제어 시스템을 설계한다. 제어기는 고전적인 PD제어기를 활용했으며, 적정 PD 계수를 선정하기 위해 LQR을 활용하는 방식을 도입한다[15-17].

1. PD 제어기

선형화된 상태 공간 방정식 (18)에서 볼 수 있듯이 입력 u_1 은 기울기 ϕ 에만 영향을 미치며, 마찬가지로 입력 u_2 는 기울기 θ 에만 영향을 미친다. 따라서 $x-z$ 축 평면과 $y-z$ 축 평면의 1-자유도 도립진자 시스템으로 분리할 수 있으며, 각 방향의 PD제어기는 식 (21), (22)과 같이 나타난다.

x 축 방향의 PD 제어기식:

$$a_x = k_{px}x + k_{dx}\dot{x} + k_{p\phi}\phi + k_{d\phi}\dot{\phi}, \quad (21)$$

y 축 방향의 PD 제어기식:

$$a_y = k_{py}y + k_{dy}\dot{y} + k_{p\theta}\theta + k_{d\theta}\dot{\theta}. \quad (22)$$

본 논문에서는 적정 PD 제어 이득을 구하기 위해 LQR을 활용한다.

2. LQR 제어기

LQR은 다양한 응용 분야에서 널리 활용된 최적 제어 이론의 하나이다[18]. LQR 문제의 해는 상태 변수에 계수를 곱한 형태로 나타나며, 이는 고전적인 PD 제어기와 같은 형태를 가진다. LQR의 비용 함수 J 는 식 (23)과 같은 형태로 나타나며, r 은 상태 벡터의 기준값(reference value)이다.

$$J = \int_0^{\infty} (x-r)^T Q(x-r) + u^T R u dt. \quad (23)$$

여기서 $Q \geq 0$ 이고 $R > 0$ 이다. 이는 보통 가중행렬로 알려져 있다. R 행렬은 입력의 양을 결정하며, Q 행렬은 제어하는 상태의 가중치를 나타낸다. 본 논문에서는 실험적으로 식 (24)와 같이 Q 와 R 을 선정하였다.

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 70 \\ 07 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

비용 함수 J 에 최적인 최적 입력 u^* 는 식 (25)와 같이 나타나며, 상태변수에 계수 K 를 곱한 형태로 나타난다[18].

$$u = -Kx(t). \quad (25)$$

되먹임 이득 행렬 K 는 식 (26)과 같이 나타나며, P 는 식 (27)의 Riccati equation을 해결하여 얻을 수 있다[18].

$$K = R^{-1}B^T P, \quad (26)$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (27)$$

MATLAB 등을 이용하여 이득행렬 K 를 구하면 식 (28)과 같이 나타난다.

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1952 & 2.3227 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28.9880 & 6.7255 \\ 0 & 0 & 1.1952 & 2.3227 & -28.9880 & -6.7255 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

3. LQR을 활용한 PD 제어기 계수 선정

식 (28)을 식 (25)에 대입하여 식을 정리하면 식 (29)와 같다.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}x + k_{12}\dot{x} + k_{17}\phi + k_{18}\dot{\phi} \\ k_{23}y + k_{24}\dot{y} + k_{25}\theta + k_{26}\dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

식 (29)의 형태는 식 (21)과 식 (22)의 PD제어기와 완전히 같은 구조를 가진다. 따라서 LQR을 이용하여 PD제어기의 계수를 선정할 수 있으며, 표 2는 LQR을 활용하여 구한 PD 제어기의 제어 이득을 나타낸다.

표 2. LQR을 활용한 PD 제어기의 계수.

Table 2. PD controller gain obtained through LQR.

PD gain	LQR	Value
k_{px}	k_{11}	1.1952
k_{dx}	k_{12}	2.3227
k_{py}	k_{23}	1.1952
k_{dy}	k_{24}	2.3227
$k_{p\theta}$	k_{17}	28.9880
$k_{d\theta}$	k_{18}	6.7255
$k_{p\phi}$	k_{25}	-28.9880
$k_{d\phi}$	k_{26}	-6.7255

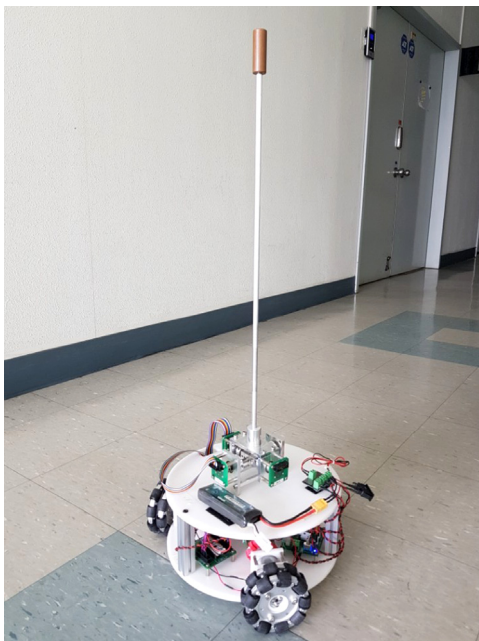


그림 6. 도립진자 시스템의 안정화 제어상태.
Fig. 6. Stabilized state of the inverted pendulum system.

V. 실제 시스템 적용 및 결과 분석

이 절에서는 제안된 구현방법을 실제 시스템에 적용하고 결과를 분석한다. 그림 6은 구현된 도립진자 시스템의 안정화 제어 상태를 나타낸다. 도립진자 시스템을 구현하기 위해서 오픈소스 하드웨어인 Nucleo-32 F303K8 board를 활용한다. Nucleo-32 F303K8 board는 STM사에서 출시한 오픈소스 하드웨어로 ARM Cortex-M4 core를 기반으로 한다. 또한 72MHz CPU 주파수 속도, 부동 소숫점 연산 하드웨어 내장, 3개의 하드웨어 엔코더 카운터 내장 등의 스펙으로 3개의 바퀴를 이용하여 주행하는 ODR 기반 도립진자 시스템에 적용하기 용이하다. 그림 7은 도립진자 시스템에 적용된 임베디드 시스템을 나타낸다. 또한 전체적인 제어 알고리즘은 그림 8에 표기하였다. 시스템의 상태(state)를 측정, LQR 제어기를 활용하여 적정 가속도 값을 결정한다. 시스템에 가속도를 직접 인가할 수 없으므로, 결정된 가속도 값을 적분하여 시스템의 속도 reference로 변환하고 이를 주행체의 운동역학을 활용하여 각 구동기의 속도 reference로 변환한다. 변환된 속도값을 내부의 속도제어기를 활용하여 추종하는 방식을 활용한다. 제안된 방법을 실제 2자유도 도립진자 시스템에 적용하여 안정화 실험을 수행하고 제어 성능을 살펴본다.

샘플링 주기는 1ms로 설정하였으며, 시스템의 초기값은 도립진자를 직접 세워 올려 평형점(equilibrium point)에 최대한 가까운 곳에 위치시킨 후 실험을 시작했다. 동일한 크기의 외란을 인가하기 위해, 3D 프린터를 이용하여 외란 인가 장치를 구현한다. 여기서 장치의 길이는 0.235 m, 질량은 0.04 kg이다. 외란을 인가하는 과정은 다음과 같다. 1) 외란을 인가하고자 하는 방향(x 축 기준으로 120°)과 외란 인가 장치가 자유낙하하여 도립진자의 무게중심추를 가격하는 높이에 인가장치를 위치시킨다. 2) 장치가 지면에 대해 수평하도록 위치시킨 후 자유낙하시킨다. 3) 샤프트를 중심으로 장치가 진자운동을 하여 도립진자를 가격한다. 이 때

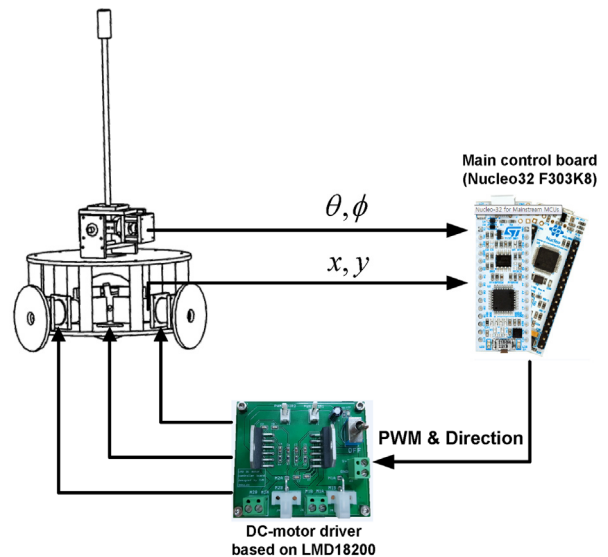


그림 7. 도립진자 시스템의 임베디드 시스템 구조.
Fig. 7. Embedded system framework for the pendulum system.

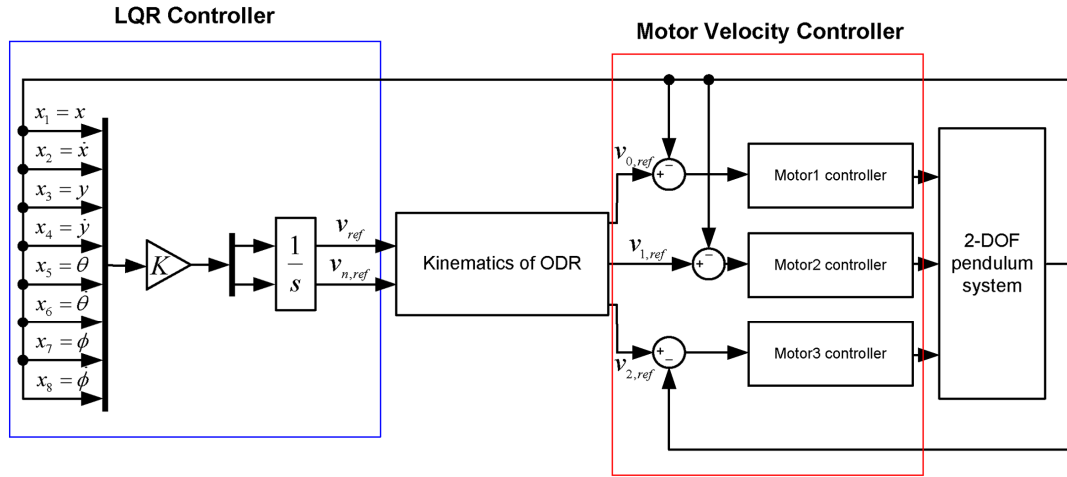


그림 8. 2-자유도 도립진자 시스템의 전체 제어 블록 선도.
 Fig. 8. Control block diagram for a 2-DOF inverted pendulum.

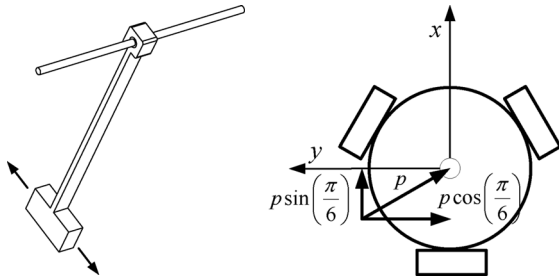


그림 9. (좌) 3-D 프린터를 활용해 제작된 외란 인가 장치, (우) 외란 인가 개념도.
 Fig. 9. (left) 3-D printed object used for disturbance generation, (right) Conceptual diagram for applying disturbance to the system.

장치의 구조상 공기의 저항은 무시할 수 있으므로 외란 인가 장치의 위치에너지는 모두 운동에너지로 변환된다고 가정할 수 있으며 따라서 도립진자에 가해지는 운동량은 에너지 보존법칙에 의해 0.0859 kgm/s 임을 알 수 있다. 구현된 외란 인가 장치 및 실험 방식은 그림 9와 같이 나타내며, p 는 도립진자에 인가된 운동량을 나타낸다. 실험은 총 10 번을 진행하였으며, 각 상태에 따른 그래프는 그림 10, 11 과 같이 나타난다. 진자의 기울기 θ, ϕ 는 약 1~1.2초 구간에서 외란으로 인해 기울어진 후, x, y 를 원점으로 이동시키기 위해 1.2~1.8초까지 외란과 반대방향으로 기울어지며 약 5초 이후부터 안정상태로 수렴함을 확인할 수 있다. 도립진자에 인가된 운동량 p 는 그림 9와 같이 x 축과 y 축방향으로 벡터 분리될 수 있으며, 그 비율은 식 (30)과 같다.

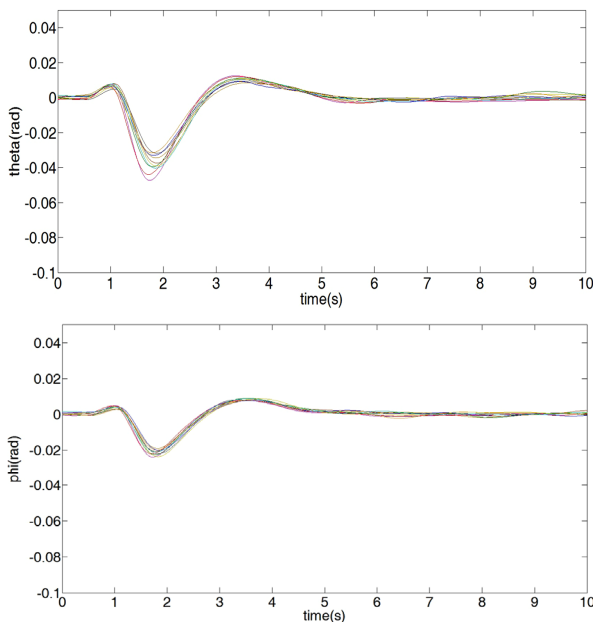


그림 10. 외란 제거 실험에서의 θ, ϕ .
 Fig. 10. Response of θ and ϕ in disturbance rejection experiment.

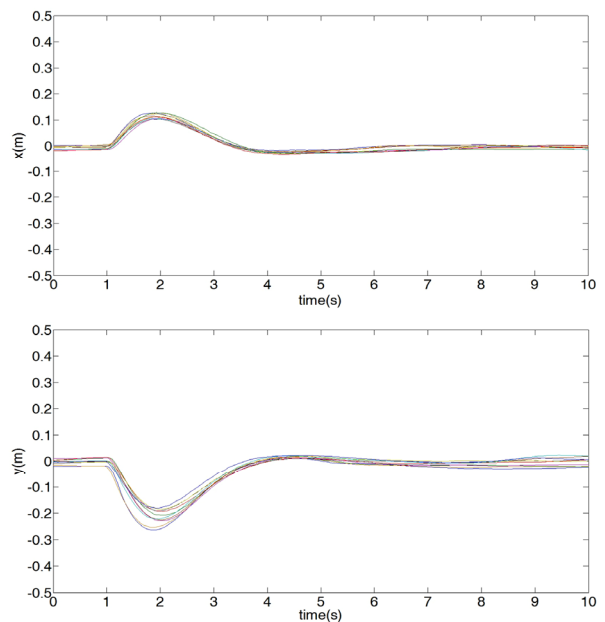


그림 11. 외란 제거 실험에서 x, y 의 응답.
 Fig. 11. Response of x and y in disturbance rejection experiment.

$$\frac{p \sin(\frac{\pi}{6})}{p \cos(\frac{\pi}{6})} = 0.5774. \quad (30)$$

실제 실험에서 외란으로 인한 θ , ϕ 의 최대 기울기는 각각 $-0.0288(\text{rad})$, $-0.0456(\text{rad})$ 으로 그 비율은 0.6330이며, 외란으로 인한 x , y 의 최대 이동 변위는 각각 0.1153(m), 0.2157(m)로 그 비율은 0.5345이다. 따라서 실험으로 나타난 최대 각 변위, 직선 변위 등의 비율이 이론적 비율과 유사함을 알 수 있다.

VII. 결론

본 논문은 구동로봇의 가속도를 제어입력으로 가지는 2-자유도 도립진자 시스템의 수학적 모델 유도 방식을 활용하여, 구동기 파라미터 불확실성에 강인한 전방향 주행체 기반 2-자유도 도립진자 시스템 구현방법을 제안하였다. 전체 제어기는 LQR 기법을 활용한 모델 제어 파트와 가속도 reference를 추종하기 위한 구동기의 속도 제어기로 구성하였다. 제안된 수학적 모델에는 구동기의 전기적인 모델 방정식이 포함되지 않으므로 제어 시스템은 구동기 파라미터와 독립적으로 운용될 수 있으므로 구동기의 파라미터 불확실성에 강인한 제어를 설계할 수 있다. 또한 속도 제어기만 구성할 수 있으면 전체 제어기를 구성할 수 있으므로, 주행로봇의 구동기를 선정함에 있어서 선택의 다양성을 가질 수 있다. 더욱이 토크제어에 부적절한 스텝모터 역시 구동기로 사용할 수 있다. 제안된 수학적 모델 유도 방식과 제어기의 성능을 검증하기 위해 일정한 크기의 외란을 반복적으로 인가하는 방식의 외란 제거 실험을 수행하였으며, 외란은 x 축 기준 120° 위치에서 인가하였다. 이를 통해 구동기의 수학적 모델 없이도 제안된 모델 기반 제어 방식이 안정화 제어를 효율적으로 수행함을 확인할 수 있었으며, 구현된 시스템이 2-자유도 운동을 충분히 구현하고 있음을 확인하였다. 실험을 통한 제어 성능의 신뢰도 검증은 구동기의 전압 전류 및 토크를 제어 입력으로 가지는 기존의 모델기반 제어 방식은 사용할 수 있는 모터의 종류가 제한적이었던 것에 반해, 제안되는 방법은 속도제어가 가능한 모든 구동기에 적용될 수 있는 장점을 가짐을 의미한다. 또한 구현된 2-자유도 도립진자 시스템은 구동부가 3-자유도를 가진다. 따라서 향후 제어문제 설정에 확장성을 가진다.

REFERENCES

[1] H. Wang, A. Chamroo, C. Vasseur, and V. Koncar, "Stabilization of a 2-DOF inverted pendulum by a low cost visual feedback," *Proc. of 2008 American Control Conference*, Seattle, pp. 3851-3856, Washington, USA, 2008.

[2] Y. S. Lee, J. J. Oh, S. Y. Shim, H. Lim, and J. H. Seo, "Swing-up control for a rotary inverted pendulum with restricted rotation range," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 14, no. 6, pp. 548-553, Jun. 2008.

[3] R. Yang, Y. Kuen, and Z. Li, *Stabilization of a 2-DOF Spherical Pendulum on XY Table*, *IEEE Conference on*

Control Applications, Sep. 2000, Anchorage, AK, USA.

[4] X. Albouy and L. Praly, "On the use of dynamic invariants and forwarding forwarding for swinging up a spherical inverted pendulum," *IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, Dec. 2000.

[5] C. Chunc, J. Lee, and B. Lee, "Balancing of an inverted pendulum with a redundant direct-drive robot," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, CA, USA, Jun. 2000.

[6] K. J. Astrom and K. Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 36, pp. 287-295.

[7] M. W. Spong, P. Corke, and R. Lozano, "Nonlinear control of the reaction wheel pendulum, automatica," vol. 37, pp. 1845-1851.

[8] I. Soto and R. Campa, "Modeling and control of a spherical inverted pendulum on a five-bar mechanism," *Int. J. Adv. Robot. Syst.*, vol. 12, no. 95, pp. 1-16, 2015.

[9] J. S. Choi and Y. S. Lee, "The implementation of a hardware-in-the-loop simulator for an inverted pendulum system using open-source hardware," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 23, no. 2, pp. 117-125, 2017.

[10] T. D. Viet, P. T. Doan, H. Giang, H. K. Kim, and S. B. Kim, "Control of a 2-DOF omnidirectional mobile inverted pendulum," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 26, pp. 2921-2928.

[11] E. V. Kumar and J. Jerome, "LQR based optimal tuning of PID controller for trajectory tracking of Magnetic Levitation System," *Procedia Engineering* 64, pp. 254-264.

[12] E. V. Kumar and J. Jerome, "Robust LQR controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum," *Procedia Engineering* 64, pp. 169-178, 2013.

[13] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, New York, Wiley, 2006.

[14] H. P. Oliveira, A. J. Sousa, A. P. Moreira, and P. J. Costa, Modeling and assessing of omni-directional robots with three and four wheels, A. D. Rodic, editor, Conte.

[15] J. Y. Choi and Y. S. Lee, "The controller implementation of a balancing robot using a system model with acceleration as the input," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 24, no. 1, pp. 16-25, Jan. 2018.

[16] A. N. K. Nasira, M. A. Ahmada, and M. F. Rahmatb, "Performance comparison between LQR and PID controllers for an inverted pendulum system," *International Conference on Power Control and Optimization: Innovation in Power Control for Optimal Industry*, vol. 1052, Issue 1, pp. 124-128, 2008.

[17] H. Wang, H. Dong, L. He, Y. Shi, and Y. Zhang, "Design and simulation of lqr controller with the linear inverted pendulum," *International Conference on Electrical and Control*

Engineering, China, 2010.

- [18] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1970.



이 창 현

2017년 인하대 전기공학과 졸업. 2017년 동 대학원 석사. 2017년~현재 인하대학교 전기공학과 석사과정 재학 중. 관심 분야는 비선형 시스템 제어, 최적제어, 로봇 공학.

이 영 삼

제어·로봇·시스템학회 논문지, 제15권 제4호 참조.